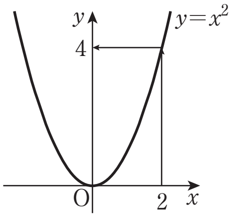
# PART3 逆関数

## 要点整理と公式

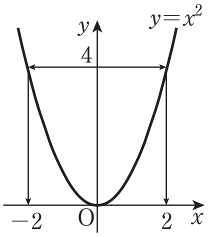
### 要点 ① 逆関数

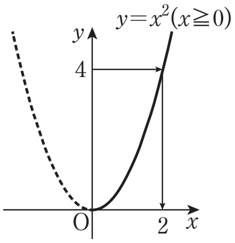
　$x$ の値が 1 つ決まると，それに対応して $y$ の値がただ 1 つ決まるとき，$y$ は $x$ の「関数」であるといい，この関数を $y=f(x)$ と表すことができる。

　たとえば，$y=x^2$ について，$y$ は $x$ の関数であり，$f(x)=x^2$ として $y=f(x)$ と表すことができる。
$y=x^2$ の定義域は実数全体，値域は $y\geqq 0$ である。

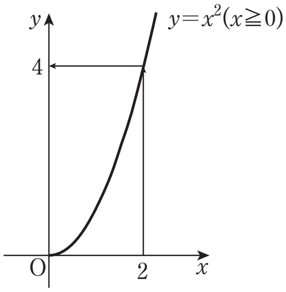



　この $y=x^2$ において，値域内の $y$ の値が 1 つ決まっても，$x$ の値はただ 1 つに定まらない。よって，$x$ は $y$ の関数とはいえない。
　ここで，$y=x^2$ の定義域を $x\geqq 0$ とすると値域 $(y\geqq 0)$ 内の $y$ の値 1 つに対応して，$x$ の値がただ 1 つに定まる。

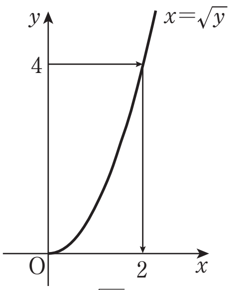



一般に，関数 $y=f(x)$ において，値域内の $y$ の値が 1 つ決まると，それに対応して $x$ の値がただ 1 つ決まるとき，$x$ は $y$ の関数であるという。このとき，この関数を $x=g(y)$ と表すことができる。
たとえば，$y=x^2$ を $x$ について解くと $x=\pm\sqrt{y}$
ここで，定義域を $x\geqq 0$ と定めると $x=\sqrt{y}$ となる。
よって，$g(y)=\sqrt{y}$ として，$x=g(y)$ と表すことができる。



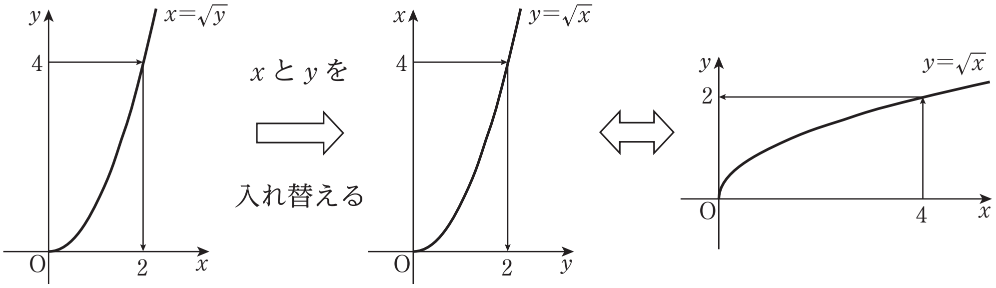

$f(x)=x^2$




$g(y)=\sqrt{y}$

このとき，変数 $y$ を $x$ に書き直した関数 $g(x)$ を，もとの関数 $f(x)$ の「　　　　」といい，$f$　$(x)$ $($$f$　　　　　　　$x$$)$と表す。

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れ替わる。つまり，逆関数の定義域は，もとの関数の値域である。




$g(y)=\sqrt{y}$
値域

$g(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
定義域

## 逆関数

関数 $y=f(x)$ において，$y$ の値を1つ決めるとそれに対応して $x$ の値がただ1つ決まるとき，すなわち $x=g(y)$ と表されるとき，$x$ と $y$ を入れ替えて得られる関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の逆関数といい，$y=f^{-1}(x)$ と表す。

<逆関数の性質>

・$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$

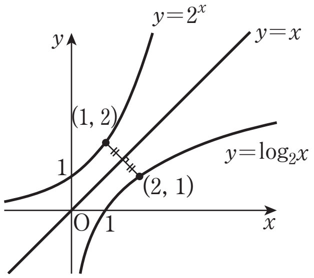
・$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では，定義域と値域が入れ替わる

(ex) 指数関数 $y=2^x$ の逆関数

$y=2^x$より $x=$

$x$ と $y$ を入れ替えると，$y=$

これが $y=2^x$ の逆関数である。




$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$ が成り立つことにより，点 $(a,\ b)$ が関数 $y=f(x)$ のグラフ上にあることと点 $(b,\ a)$ が関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフ上にあることは同値である。点 $(a,\ b)$ と点 $(b,\ a)$ は，直線　　　　に関して対称であるから，次のことが成り立つ。

## 逆関数のグラフの性質

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは

直線 $y=x$ に関して対称である。

**3** (1) 次の関数の逆関数を求めよ。また，それぞれの関数のグラフとその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(i) $y=3x-6\ (1\leqq x\leqq 2)$　　(ii) $y=\sqrt{2-x}$

(iii) $y=4^x$　　(iv) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

(2) 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ の逆関数を求めよ。

## Point Pickup

**逆関数の求め方**

$y=f(x)$ の逆関数の求め方は以下

① $y=f(x)$ を $x$ について解き，$x=g(y)$ の形にする。

② $x=g(y)$ の $x$ と $y$ を入れ替えて，$y=g(x)$ とする。

この $g(x)$ が，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ である。

$f^{-1}(x)$ の定義域は，$f(x)$ の値域である。また $f^{-1}(x)$ の値域は，$f(x)$ の定義域である。

**逆関数の性質**

関数 $f(x)$ が，逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき

・$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$

・$y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

# 第 1 講　PART3 確認問題

次の関数の逆関数を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

また，定義域を示してあるものは，当てはまる数を記入せよ。

**1**　$y=-2x+8\quad(0\leqq x\leqq 3)$

逆関数　$y=$ ア　（ イ $\leqq x\leqq$ ウ ）

① $2x-8$　② $-2x+4$

③ $\dfrac{1}{2}x+4$　④ $-\dfrac{1}{2}x+4$

**2**　$y=\sqrt{x-3}$

逆関数　$y=$ エ　（$x\geqq$ オ ）

① $x^2$　② $x^2+3$

③ $x^2-3$　④ $\sqrt{-x+3}$

**3**　$y=3^x$

逆関数　$y=$ カ

① $x^3$　② $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

③ $\log_3 x$　④ $\log_{\frac{1}{3}} x$

**4**　$y=\log_2 x$

逆関数　$y=$ キ

① $2^x$　② $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

③ $x^2$　④ $-\log_2 x$

**5** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

逆関数　$y=$ **ク**

① $\dfrac{2x+1}{x-1}$　　② $-\dfrac{x}{x-2}$

③ $\dfrac{x+1}{x-2}$　　④ $-\dfrac{x+1}{x-2}$

**[MEMO]**

# PART3 逆関数

**3** (1) 次の関数の逆関数を求めよ。また，それぞれの関数のグラフとその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(i) $y=3x-6\ (1\leqq x\leqq 2)$　　(ii) $y=\sqrt{2-x}$

(iii) $y=4^x$　　(iv) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

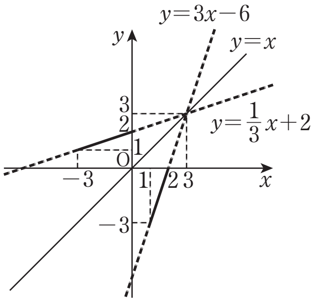
(2) 関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ の逆関数を求めよ。

**[解答]**

(1)(i) この関数の値域は $-3\leqq y\leqq 0$

$y=3x-6$ を $x$ について解くと $x=\dfrac{1}{3}y+2$

よって，逆関数は $y=\dfrac{1}{3}x+2\quad(-3\leqq x\leqq 0)$

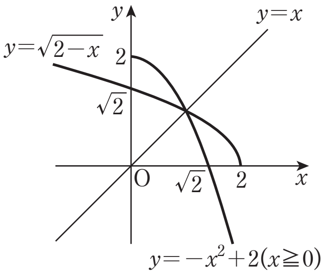



(ii) この関数の値域は $y\geqq 0$

$y=\sqrt{2-x}$ を $x$ について解くと $y^2=2-x$ より

$x=-y^2+2$

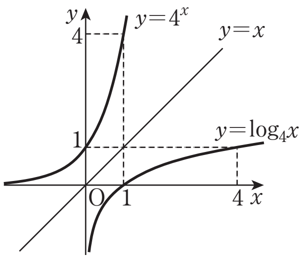
よって，逆関数は $y=-x^2+2\quad(x\geqq 0)$




(iii) この関数の値域は $y>0$

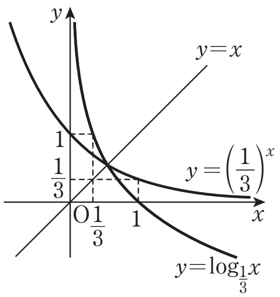
$y=4^x$ を $x$ について解くと $x=\log_4 y$

よって，逆関数は $y=\log_4 x$



(iv)　$y=\log_{\frac{1}{3}}x$ を $x$ について解くと $x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^y$

よって，逆関数は $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$




(2)　$y=\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-3}{x-1}=-\dfrac{3}{x-1}+2$

よって，この関数の値域は $y\neq 2$

$y=\dfrac{2x-5}{x-1}$ より $(x-1)y=2x-5$　　$(y-2)x=y-5$

$y\neq 2$ より $x=\dfrac{y-5}{y-2}$

よって，逆関数は $y=\dfrac{x-5}{x-2}$

# 第 1 講　PART3 確認問題 解答

**1** [正解] ア：④，イ：2，ウ：8

[解説]

$$y=-2x+8 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$$

この関数の値域は，$2 \leqq y \leqq 8$

$y=-2x+8$ を $x$ について解くと，[A]

$$2x=-y+8$$

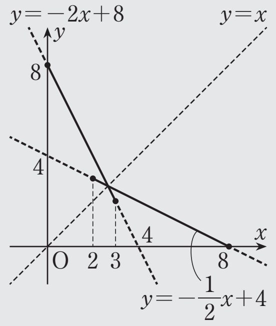
$$x=-\frac{1}{2}y+4$$

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+4 \quad (2 \leqq x \leqq 8)}$$ [B]

[A]　$y=f(x)$ の逆関数の求め方
① $y=f(x)$ を $x$ について解き，$x=g(y)$ の形にする。
② $x=g(y)$ の $x$ と $y$ を入れ替えて $y=g(x)$ とする。
この $g(x)$ が，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ である。

[B]　・$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ では定義域と値域が入れ替わる。
・$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。




**2** [正解] エ：②，オ：0

[解説]

$y=\sqrt{x-3}$ の値域は，$y \geqq 0$

$y=\sqrt{x-3}$ を $x$ について解く。

$\sqrt{x-3}=y$ の両辺を 2 乗すると，[C]

$$x-3=y^2$$

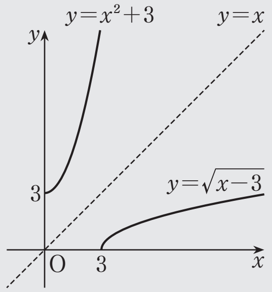
$$x=y^2+3$$

よって，逆関数は，

$$\boldsymbol{y=x^2+3 \quad (x \geqq 0)}$$ [D]

[C]　両辺を 2 乗して $\sqrt{\quad}$ をはずす。

[D]



**3**

**[正解]** カ：③

**[解説]**

$y=3^x$ の値域は，$y>0$ [E]

$y=3^x$ を $x$ について解くと，

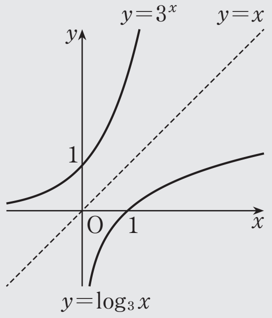
$x=\log_3 y$ [F]

よって，逆関数は，

$\boldsymbol{y=\log_3 x}$

[E]　逆関数の定義域は $x>0$ である。

[F]　$y=a^x \iff x=\log_a y$




**4**

**[正解]** キ：①

**[解説]**

$y=\log_2 x$ の値域は，実数全体である。[G]

$y=\log_2 x$ を $x$ について解くと，

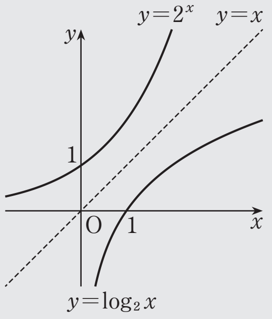
$x=2^y$ [H]

よって，逆関数は，

$\boldsymbol{y=2^x}$

[G]　逆関数の定義域も実数全体となる。

[H]　$y=\log_a x \iff x=a^y$



## 5 [正解] ク：④

**[解説]**

$$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$$

よって，この関数の値域は，$y \fallingdotseq 2$ [I]

$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ を $x$ について解くと，

$(x+1)y=2x-1$

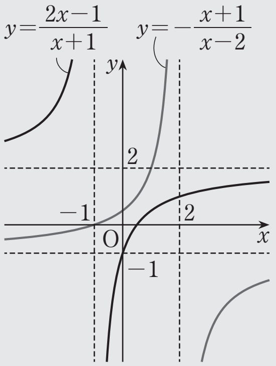
$xy+y=2x-1$

$(y-2)x=-y-1$

$y \fallingdotseq 2$ より，$x=-\dfrac{y+1}{y-2}$

よって，逆関数は， [J]

$$\boldsymbol{y=-\frac{x+1}{x-2}}$$

[I]　逆関数の定義域は $x \fallingdotseq 2$ である。

[J]